MAI 1 – 9. a 10. cvičení

1. Nekonečné řady.

1. Vyšetřete absolutní, případně neabsolutní konvergenci řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$; $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$.

2. V závislosti na parametru $x \in R$ vyšetřete, zda konverguje absolutně, resp. konverguje neabsolutně, resp. diverguje řada

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}(x-2)^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n}{n^2+1}(x+1)^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{2^n(n+1)}(x-3)^n$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$.

2. Limita funkce.

1. Z definice limity ukažte:

a) $\lim_{x\to 2}(3x-2)=4$; b) $\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}=0$; c) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$; d) $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

2. Nechť funkce f je neklesající a omezená v intervalu (a,b). Dokažte, že pak pro libovolné $c\in(a,b)$ existují vlastní limity $\lim_{x\to c+}f(x)$ a $\lim_{x\to c-}f(x)$; co lze říci o oboustranné limitě $\lim_{x\to c}f(x)$?

3. Ukažte, že platí:

(i) $\lim_{x\to c}|f(x)|=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to c}f(x)=0$

(ii) Je-li $\lim_{x\to c}f(x)=0$ a funkce $g(x)$ je omezená v nějakém prstencovém okolí bodu c, pak i $\lim_{x\to c}f(x)g(x)=0$.

4. Vypočítejte limity , nebo ukažte, že neexistují :

a) $\lim_{x\to -3}\frac{-1}{(x+3)^2}$; $\lim_{x\to +\infty}\frac{-1}{(x+3)^2}$; $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+1}{x^2-1}$; $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-1}$; $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{1-x^2}$; $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2}$;

$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{3-x^2}$; $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^3}{3-x^2}$;

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-x}{x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$; $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; $\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$;

$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$; $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$;

c) (limita složené funkce) $\lim_{x\to 3}\exp\left(\frac{1}{3-x}\right)$; $\lim_{x\to -\infty}\exp\left(\frac{1}{3-x}\right)$; $\lim_{x\to +\infty}x^2\exp\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim_{x\to ?}\exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$;

$\lim_{x\to ?}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$; $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; $\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$;

d) Víme-li, že $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, spočítejte limity (nebo ukažte, že neexistují) :

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{tg\, x}{x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$; $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$; $\lim_{x\to 0+}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}$; $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$; $\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)$;

e) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin x}{x}$; $\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sin x}{x-\cos x}$; $\lim_{x\to +\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim_{x\to +\infty}x\sin x$; $\lim_{x\to +\infty}x(2+\sin x)$;

$\lim_{x\to +\infty}(x+\cos x)$; $\lim_{x\to +\infty}e^{-x}\sin x$.